Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Departamento de Física

Curso de Óptica Aplicada

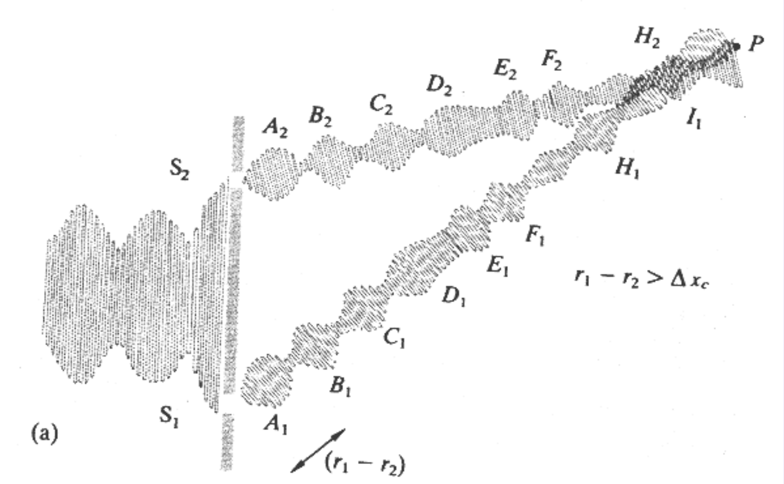
Aula Teórica 8 – Interferências

Aula Teórica 8 – Interferências

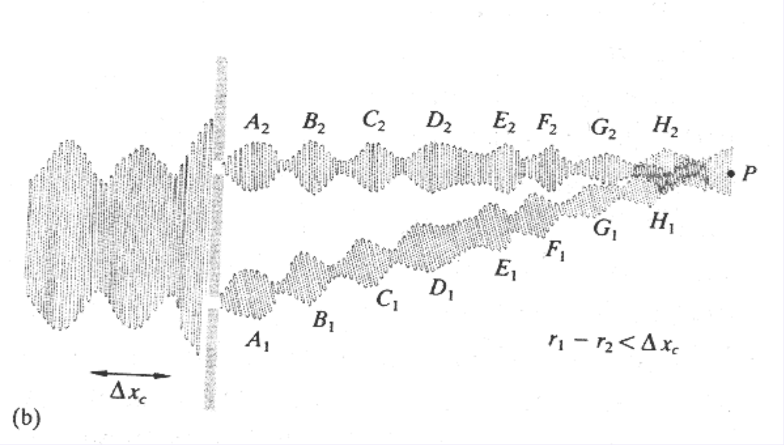
- Coerência
- Sobreposição e interferências de ondas planas monocromáticas
- Interferência de ondas esféricas
- Experiência de Young
- Interferência em filmes finos

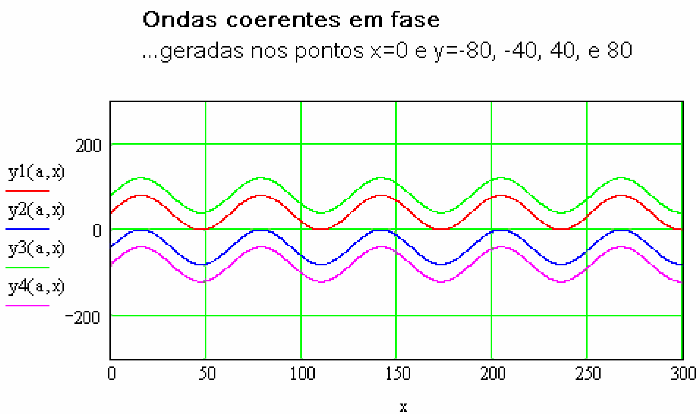
Coerência

O sinal luminoso emitido por uma fonte pode variar no tempo em frequência e amplitude.



Duas fontes são coerentes quando as variações no tempo de frequência e amplitude são idênticas e as diferenças de fase são constantes





A fonte do feixe de ondas pode ser coerente sem as ondas estarem em fase.

A coerência exige apenas que se mantenham as diferenças de fase no decorrer do tempo.

Faça clic sobre a figura para activar animação

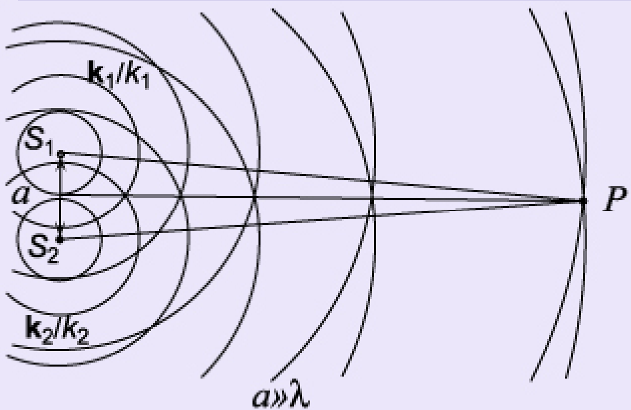
Sobreposição e interferências de ondas planas monocromáticas

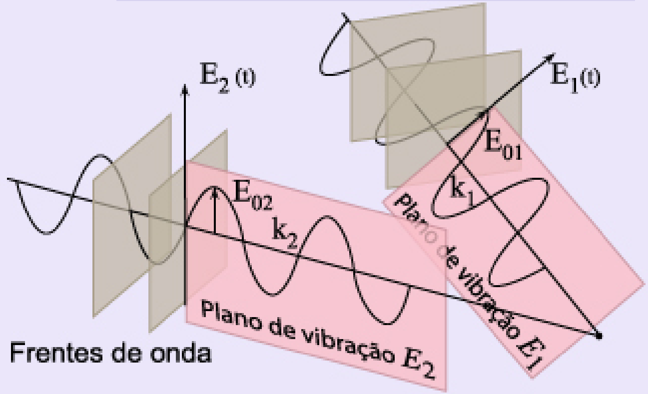
$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01} \cdot \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varepsilon_1)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02} \cdot \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varepsilon_2)$$

$$I = \langle \vec{E}^{\,2} \rangle$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_1(\vec{r},t) + \vec{E}_2(\vec{r},t)$$





Para calcular a irradiância temos de calcular **E**^{2}

$$\vec{E}^2 = \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) \cdot \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) = \vec{E}_1^{\,2} + \vec{E}_2^{\,2} + 2 \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Passando à média para obter a radiância vem:

$$\left\langle \vec{E}^2 \right\rangle = \left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle + 2 \cdot \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Termo de interferência

O termo de interferência é dado por:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cdot \cos\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varepsilon_1\right) \cdot \cos\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varepsilon_2\right)$$

Desenvolvendo os cosenos para separar as coordenadas espaciais e temporais, vem:

$$= \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cdot \left[\cos\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) + sen\left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \varepsilon_1\right) \cdot sen(\omega \cdot t)\right] \cdot$$
$$\left[\cos\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) + sen\left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \varepsilon_2\right) \cdot sen(\omega \cdot t)\right] =$$

Executando o produto das quantidades entre parentese rectos e fazendo a substituição:

$$\Phi = \cos\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot \cos\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \cos^2(\omega \cdot t)$$
$$\Omega = sen\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot sen\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot sen^2(\omega \cdot t)$$
$$\Psi = sen\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot \cos\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot sen(\omega \cdot t)$$
$$\Sigma = \cos\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot sen\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot sen(\omega \cdot t)$$

Vem:

$$\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 = \overline{E}_{01} \cdot \overline{E}_{02} \cdot (\Phi + \Omega + \Psi + \Sigma)$$

Passando à média para obter a radiância I_{12} vem,

$$\left\langle \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 \right\rangle = \left\langle \overline{E}_{01} \right\rangle \cdot \left\langle \overline{E}_{02} \right\rangle \cdot \left(\left\langle \Phi \right\rangle + \left\langle \Omega \right\rangle + \left\langle \Psi \right\rangle + \left\langle \Sigma \right\rangle \right)$$

Como,

$$\left\langle \Phi \right\rangle = \cos\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot \cos\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \left\langle \cos^2(\omega \cdot t) \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot \cos\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right)$$

$$\left\langle \Omega \right\rangle = sen\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot sen\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \left\langle sen^2(\omega \cdot t) \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot sen\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot sen\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right)$$

$$\left\langle \Psi \right\rangle = sen\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot \cos\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \left\langle \cos(\omega \cdot t) \cdot sen(\omega \cdot t) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \Sigma \right\rangle = \cos\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot sen\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) \cdot \left\langle \cos(\omega \cdot t) \cdot sen(\omega \cdot t) \right\rangle = 0$$

Assim vem:

$$\left\langle \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 \right\rangle = \overline{E}_{01} \cdot \overline{E}_{02} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\cos\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot \cos\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right) + sen\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1\right) \cdot sen\left(\overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_2\right)\right]$$

$$I_{12} = 2 \cdot \left\langle \overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2 \right\rangle = \overline{E}_{01} \cdot \overline{E}_{02} \cdot \left[\cos\left(\overline{k}_1 \cdot \overline{r} - \overline{k}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\right)\right] = \overline{E}_{01} \cdot \overline{E}_{02} \cdot \cos\delta$$

A irradiância $\boldsymbol{I_{12}}$, vem assim, função de posição e não de tempo

δ é a fase da variação espacial do termo de interferência da radiância,

$$I_{12} = \overline{E}_{01} \cdot \overline{E}_{02} \cdot \cos\delta$$

$$\delta = \overline{\kappa}_1 \cdot \overline{r} - \overline{\kappa}_2 \cdot \overline{r} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

Os termos da irradiância são:

$$I_{12} = E_{01} \cdot E_{02} \cdot \cos\delta$$

$$I_1 = \left\langle E_1^{\,2} \right\rangle = \frac{E_{01}^{\;2}}{2}$$

$$I_2 = \left\langle E_2^{\,2} \right\rangle = \frac{E_{02}^{\;2}}{2}$$

Assim vem:

$$I_{12} = 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\delta$$

e

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\delta$$

Interferências construtiva → $I_{max} = I_1 + I_2 + 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2}$ $\quad \delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

destrutiva → $I_{min} = I_1 + I_2 - 2 \cdot \sqrt{I_1 \cdot I_2}$ $\quad \delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$

Situações de interferência

$$\overline{E}_{01} = \overline{E}_{02} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 = I_0$$

$$I = 2 \cdot I_0 \cdot (1 + \cos\delta) = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

$$I = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

δ	Cos δ	$\boldsymbol{I}$	Comentário
$0, \pm 2\pi, \pm 4\pi ...$	1	I_{max}	Ondas em fase, interf. construt.
	0<....<1	$I_1 + I_2 <..... < I_{max}$	
(2n+1).(π/2)	0	$I1 + I2$	Ondas em quadratura
	-1<....<0	$I_{min} <...< I_1 + I_2$	
$\pi, \pm 3\pi, 5\pi, ...$	-1	$I_{min}=0$	Ondas em oposição de fase, interf. destrutiva.

Interferência de ondas esféricas

Para ondas esféricas temos número de onda e distâncias escalares e não vectoriais

$$\overline{E}_1(r_1,t)=\overline{E}_{01}(r_1)\cdot\cos(k\cdot r_1-\omega\cdot t+\varepsilon_1)$$

$$\overline{E}_2(r_2,t)=\overline{E}_{02}(r_2)\cdot\cos(k\cdot r_2-\omega\cdot t+\varepsilon_2)$$

$$\delta = k\cdot(r_1-r_2)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

$$I = 4\cdot I_0\cdot\cos^2\frac{1}{2}\left[k\cdot(r_1-r_2)+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right]$$

Para fontes pontuais coerentes as fases iniciais podem ser tomadas como nulas

$$I = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

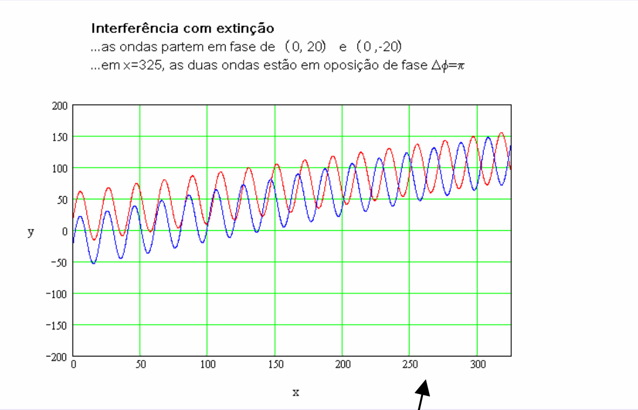
A interferência é construtiva quando:

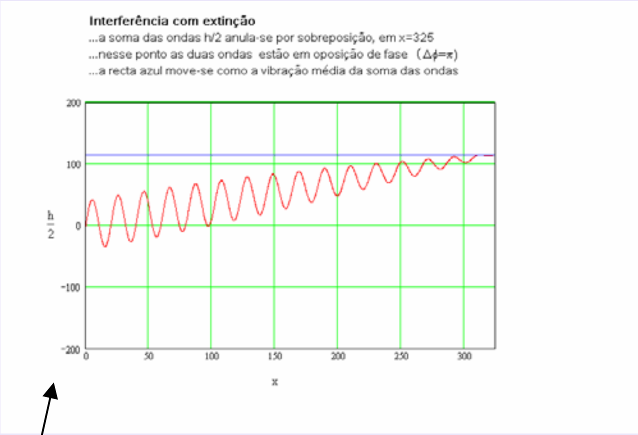
$$\delta = 2 \cdot m \cdot \pi \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

e

$$k \cdot (r_1 - r_2) = 2 \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad (r_1 - r_2) = m . \lambda$$

AT_8 – Interferências





Faça clic sobre a figura para activar animação

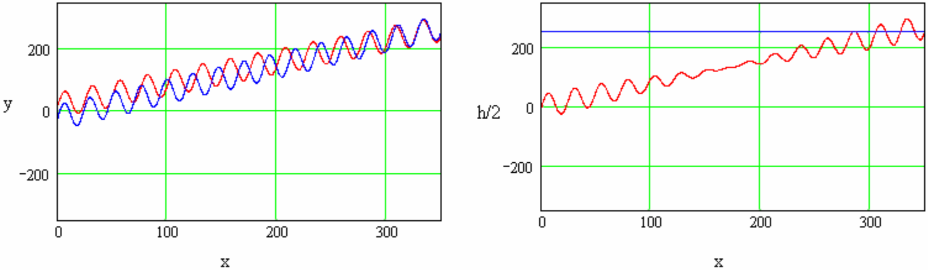
AT_8 – Interferências

Interferência com reforço

...a soma das ondas reforça-se por sobreposição, em x=325

...nesse ponto as duas ondas estão em fase ($\Delta\phi$=0, 2π,...)

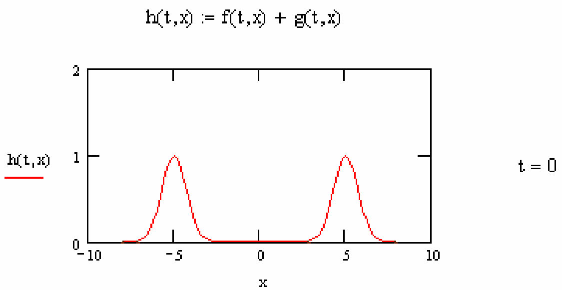
...a recta azul move-se como a vibração média da soma das ondas

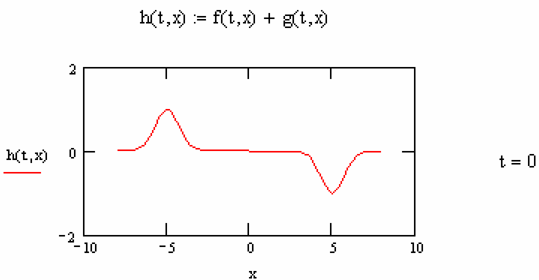


Faça clic sobre a figura para activar animação

Sobreposição

Sobreposição de perturbações impulsivas do tipo solitão gaussiano que também são soluções da equação das ondas, pode dar reforço ou extinção.

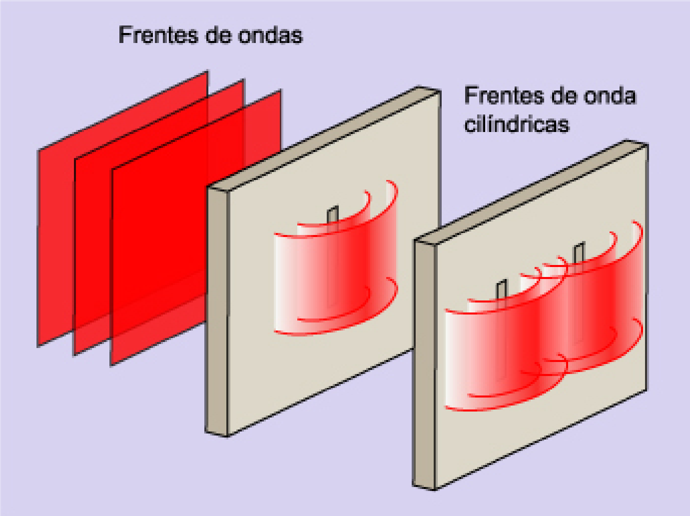


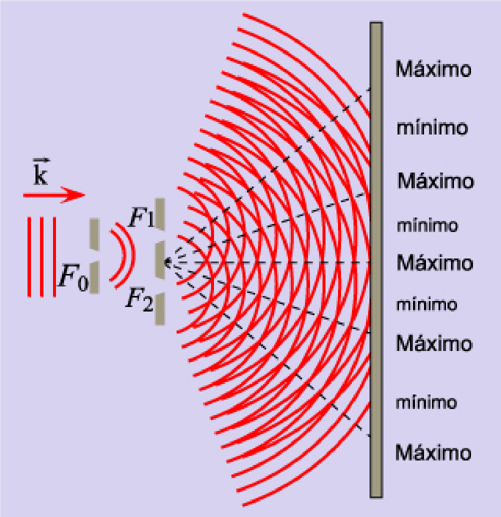


Faça clic sobre a figura para activar animação

Experiência de Young

Ondas cilindricas coerentes quase monocromáticas geradas em fendas estreitas

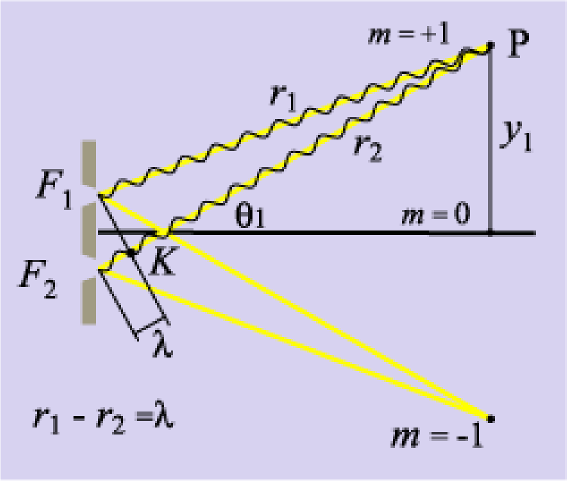




A experiência de Young foi importante por demonstrar o comportamento ondulatório da luz

Geométricamente F_2K
é a diferença de marcha :

$$\overline{F_2K} = \overline{F_1P} - \overline{F_2P} = (r_1 - r_2)$$



A condição de máximo de irradiância,

$$F_2K = (r_1 - r_2) = m.\lambda \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

...equivale a dizer que em F_2K há um número inteiro de comprimentos de onda para que haja interferência com reforço...

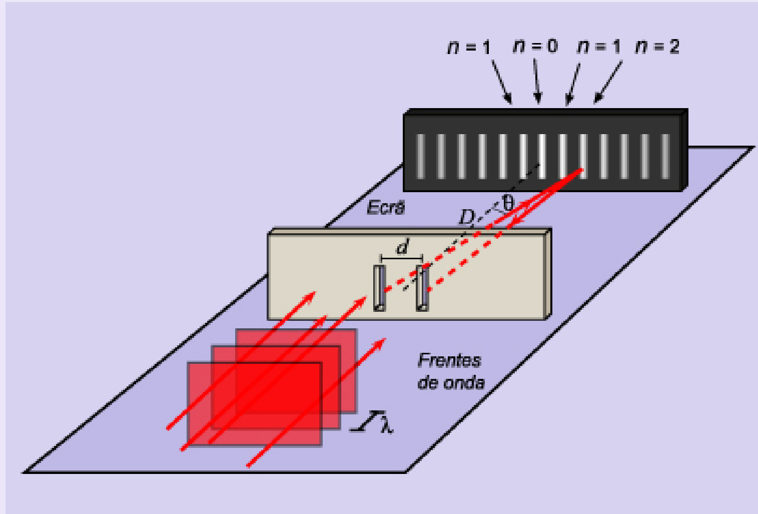
Mas como $(r_1 - r_2) = F_2K = a \cdot sen\ \theta \cong a \cdot \theta$

e como

$$\theta = \frac{y}{s} \quad \Rightarrow \quad (r_1 - r_2) = a \cdot \frac{y}{s}$$

recordando,

$$(r_1 - r_2) = m.\lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot y_m}{s} = m.\lambda$$



As coordenadas $\boldsymbol{y}_m$ de irradiância máxima de ordem m são:

$$y_m = m.\frac{s \cdot \lambda}{a}$$

A distância entre máximos é:

$$\Delta y = y_m - y_{m+1} = \frac{s.\lambda}{a}$$

$$\delta = k \cdot (r_1 - r_2)$$

... e a condição de máximo

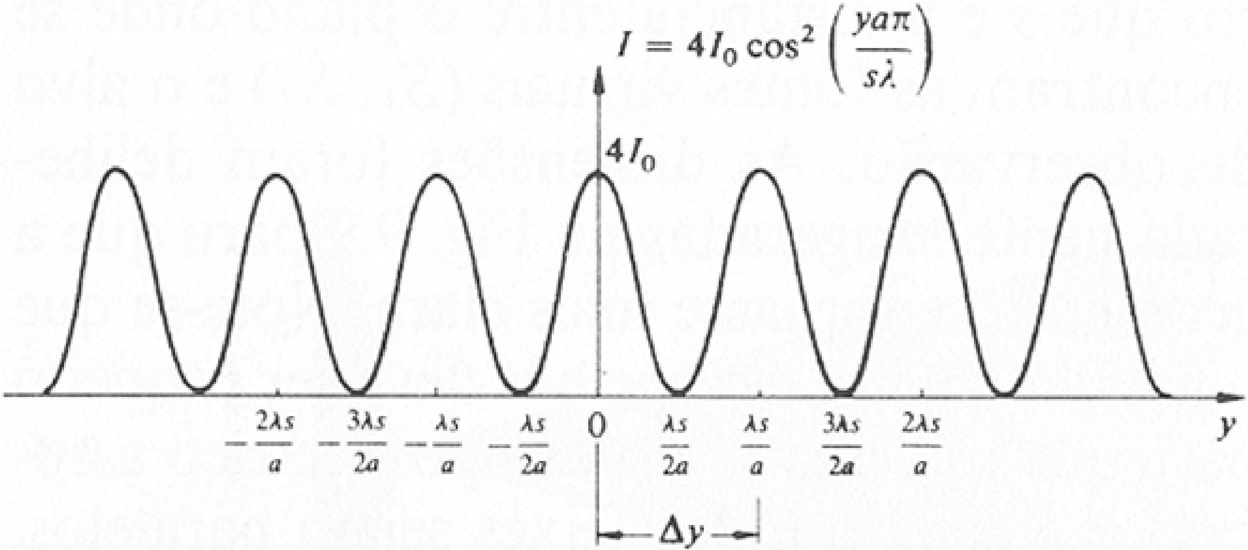
$$(r_1 - r_2) = \frac{a \cdot y_m}{s}$$

permitem escrever:

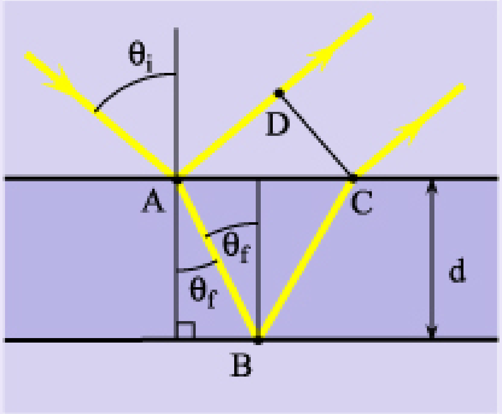
$$I = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{k \cdot (r_1 - r_2)}{2} = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{k \cdot y \cdot a}{2 \cdot s} = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot y \cdot a}{\lambda \cdot s}$$

Para a radiância sobre o alvo:

$$I = 4 \cdot I_0 \cdot \cos^2 \frac{\pi \cdot y \cdot a}{\lambda \cdot s}$$


$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{ya\pi}{s\lambda}\right)$
$4I_0$
$-\frac{2\lambda s}{a}$
$-\frac{3\lambda s}{2a}$
$-\frac{\lambda s}{a}$
$-\frac{\lambda s}{2a}$
0
$\frac{\lambda s}{2a}$
$\frac{\lambda s}{a}$
$\frac{3\lambda s}{2a}$
$\frac{2\lambda s}{a}$
y
Δy

Interferência em filmes finos



As leis de Fresnel indicam que em cada interface existe uma divisão de frentes de onda… Num filme fino dieléctrico... Existe um processo de interferência entre as ondas originadas nas interfaces e que voltam ao meio de incidência...

A diferença de percurso óptico entre o primeiro e segundo raios é:

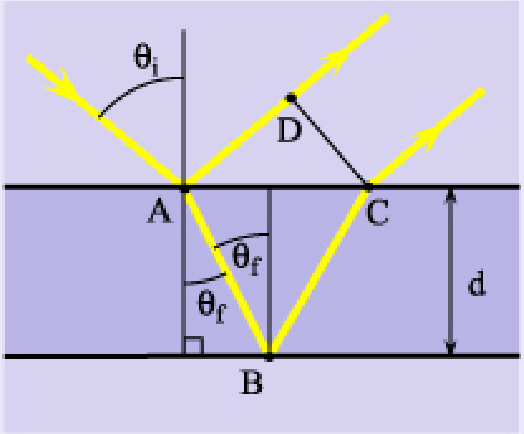
$$\Gamma = n_f\left[(AB) + (BC)\right] - AD$$

Como,

$$AB = BC = \frac{d}{\cos\theta_f}$$

Vem para o vácuo:

$$\Gamma = \frac{2 \cdot n_f \cdot d}{\cos\theta_f} - AD$$



Interferências em filmes finos

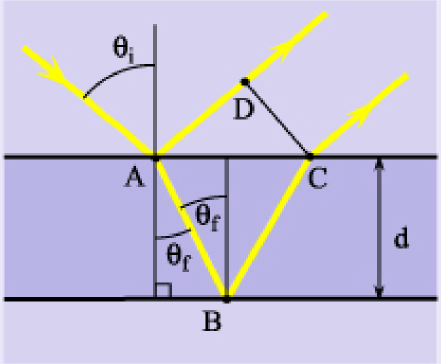
Como,

$$AD = (AC)\cdot sen\,\theta_i$$

$$AD = (AC)\cdot n_f \cdot sen\,\theta_f$$

Vem:

$$\Gamma = \frac{2\cdot n_f \cdot d}{\cos\theta_f} - (AC)\cdot n_f \cdot sen\,\theta_f$$



Como,

$$AC = 2d \cdot tg\theta_t$$

Vem:

$$\Gamma = \frac{2 \cdot n_f \cdot d}{\cos\theta_t} - 2d \cdot tg\theta_t \cdot n_f \cdot sen\theta_t =$$

$$= \frac{2 \cdot n_f \cdot d}{\cos\theta_t} - 2d \cdot tg\theta_t \cdot n_f \cdot sen\theta_t$$

$$\Gamma = \frac{2 \cdot n_f \cdot d}{\cos\theta_t}\left(1 - sen^2\theta_t\right)$$

Finalmente

$$\Gamma = 2 \cdot n_f \cdot d \cdot \cos\theta_t$$

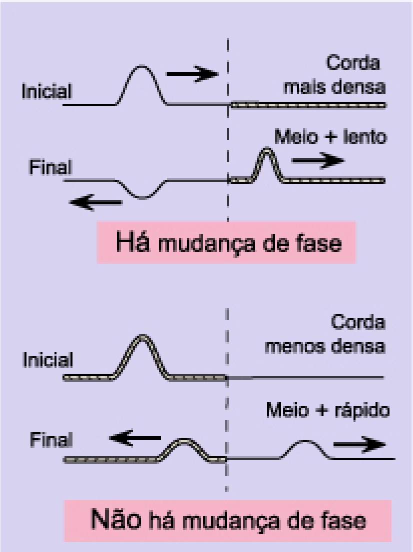
.... $k=2\pi/\lambda$, é a razão entre a fase duma onda completa, ou de um ciclo (2π) e o comprimento duma onda completa, ou espaço percorrido num ciclo (λ)... k é uma a fase por unidade de comprimento, associada à progressão da onda.... ou melhor, k é a variação de fase correspondente à progressão da onda duma unidade de comprimento.

A uma diferença de percurso óptico Γ corresponde uma diferença de fase δ dada por:

$$\delta = k_0 \cdot \Gamma$$

Interferências em filmes finos

Esta diferença de fase devem juntar-se a diferença de fase de π, devida à primeira reflexão, em A, e as diferenças de fase primeira transmissão em A, da segunda reflexão em B e da segunda transmissão em C, todas elas com valor 0, para luz de qualquer polarização e até 30º . Globalmente resulta uma diferença de fase de π.



Assim:

$$\delta = k_0 \cdot \Gamma \pm \pi$$

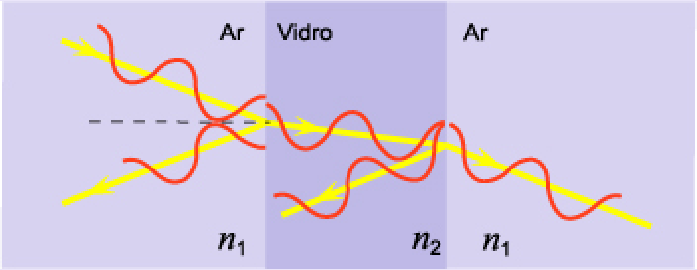
e

$$\delta = \frac{4 \cdot \pi \cdot n_f}{\lambda_0} \cdot d \cdot \cos \theta_t \pm \pi$$

Para que haja interferência com reforço, as ondas devem estar em fase, é necessário que δ, seja multiplo par de p, ou seja, $\delta = 2m \cdot \pi$, substituindo na expressão anterior

$$d \cdot n_f \cdot \cos \theta_t = (2m + 1) \cdot \frac{\lambda_f}{4}$$

com $(m = 0, 1, 2, \ldots)$



Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

... para que haja interferência com extinção, as ondas devem estar em oposição de fase e é necessário que δ, seja multiplo impar de π, ou seja:

$$\delta = (2m+1)\cdot \pi \qquad \text{com} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Donde substituindo na expressão geral de δ:

$$d \cdot n_f \cdot \cos\theta_t = 2m \cdot \frac{\lambda_f}{4} \qquad \text{com} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Num filme fino...

para que haja interferência com reforço,

$$d = (2m+1) \cdot \frac{\lambda_f}{4} \cdot \frac{1}{n_f \cdot \cos\theta_t}$$

com $(m = 0, 1, 2, \dots)$

para que haja interferência com extinção

$$d = 2m \cdot \frac{\lambda_f}{4} \cdot \frac{1}{n_f \cdot \cos\theta_t}$$

Para óculos antireflexo em que não se vêem as lentes e para óculos desportivos, que parecem espelhados, que filmes se usam ?