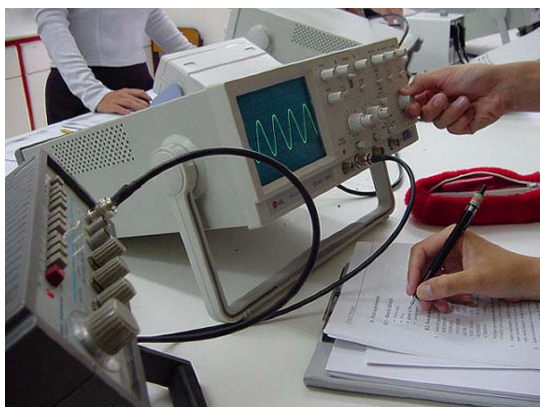




# 2

## Ressonância e factor de qualidade Os circuitos RLC

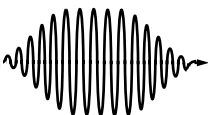
- Observar a ressonância em circuitos eléctricos.
- Medir a frequência de ressonância num circuito RLC em série
- Verificar a sua resposta em frequência
- Compreender o que é o factor de qualidade e como pode ser alterado
- Verificar a diferença de fase entre a corrente e a tensão



### Introdução

Um circuito RLC em série consiste de uma resistência  $R$ , um condensador  $C$  e uma indutância (bobina)  $L$ . Se este circuito for ligado a uma fonte de tensão alternada, a resistência total do circuito à passagem de corrente depende da frequência. Este comportamento deve-se ao facto que tanto o condensador como a indutância, oferecem uma resistência à corrente que é função da frequência da tensão eléctrica. Estas resistências que dependem da frequência, designam-se genericamente por impedâncias,  $Z$  ( $Z_C$  para o condensador e  $Z_L$  para a bobina).

Diferentemente das resistências óhmicas, as impedâncias podem apresentar uma diferença de fase entre a corrente que a percorre e a tensão nos seus extremos. Por exemplo, é fácil compreender que a corrente de carga de um condensador é máxima quando este está descarregado ( $V_C=0$ ). Esta diferença, representa uma diferença de fase de  $\pi/2$  entre a corrente e a tensão.



Por este motivo, as impedâncias têm de ser descritas, não só pelo seu módulo, mas também, pela fase. Costumam ser representadas por fasores (vectores com a mesma origem), em que o seu comprimento representa o seu módulo e o seu ângulo com a origem trigonométrica, representa a sua fase.

Para o condensador e para a bobina, os módulos da impedância são dados, respectivamente, por:

$$Z_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (\text{Eq. 1})$$

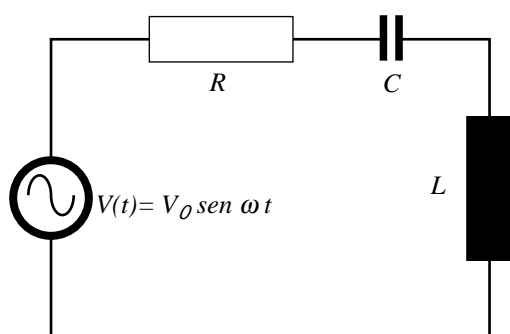
$$Z_L = \omega \cdot L \quad (\text{Eq. 2})$$

onde  $\omega$  é a frequência angular da tensão alternada.

### O circuito RLC

A associação em série destes 3 componentes,  $R$ ,  $L$  e  $C$  está representada esquematicamente na Fig. 1. Nesta situação, a impedância total do circuito é a soma das vectorial das 3 impedâncias ( $R$  também pode ser designado impedância) cujo resultado é dado por:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (\text{Eq. 3})$$



**Figura 1.** Circuito RLC em série. Os componentes  $C$  e  $L$  oferecem uma resistência à passagem de corrente que depende da frequência da tensão alternada.

Considerando que o circuito da Fig. 1 é excitado por uma tensão sinusoidal com o valor máximo  $V_0$ , aplicando a lei de Ohm, podemos calcular a cor-

rente máxima  $I_0$  do circuito.

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (\text{Eq. 4})$$

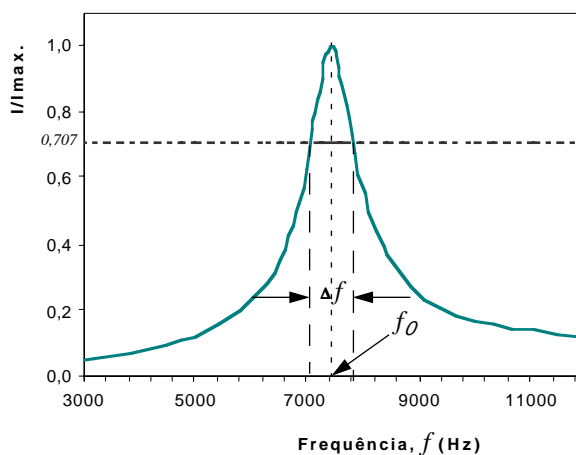
Desta equação pode-se observar que a corrente  $I_0$  tem um valor máximo quando

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Eq. 5})$$

Nesta situação, diz-se que o circuito está em ressonância porque apenas a resistência  $R$  se opõe à passagem de corrente.

A corrente  $I_0$  deste tipo de circuito tem uma resposta em frequência típica, conforme representada na Fig. 3. A frequência de ressonância  $f_0$  ocorre quando a corrente no circuito é máxima e pode ser obtida a partir da Eq. 5,

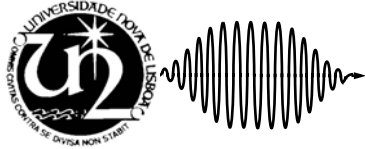
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{Eq. 6})$$



**Figura 2.** Resposta em frequência de um circuito RLC em série. A intensidade de corrente foi normalizada ao máximo.

A diferença  $\Delta f$  entre as frequências nas quais a intensidade diminui o factor  $1/(\sqrt{2})$  do seu valor máximo é designada de largura de banda e ajuda a definir o factor de qualidade  $Q$ , que é dado pela relação:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (\text{Eq. 7})$$



O factor de qualidade elevado indica que o circuito é muito selectivo em torno da sua frequência de ressonância, enquanto que um factor de qualidade reduzido, indica que a largura de banda é bastante larga.

**Tabela 1. Grandezas e unidades**

Grandeza	Unidades (SI, outras)
Resistência, $R$	ohm ( $\Omega$ ), k $\Omega$ (1 k $\Omega$ = $10^3\Omega$ )
Impedância, $Z$	ohm ( $\Omega$ ), k $\Omega$ (1 k $\Omega$ = $10^3\Omega$ )
Inductância, $L$	henry (H), mH(1mF= $10^{-3}$ H)
Capacidade, $C$	(Farad (F), $\mu$ F(1 $\mu$ F= $10^{-6}$ F)

O factor de qualidade pode ser obtido também a partir dos valores dos seus componentes, através da relação

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{2\pi f_0 CR} \quad (\text{Eq. 8})$$

O factor de qualidade também descreve quantas vezes a tensão nos extremos do condensador ou da bobina é maior que a tensão aplicada ao circuito. Isto é,

$$V_{L,max} = V_{C,max} = V_0 \cdot Q \quad (\text{Eq. 9})$$

Este valor máximo da tensão  $V_{C,max}$  ou  $V_{L,max}$  pode ser bastante elevado ( $\approx$ centenas de Volts) mesmo quando o circuito é excitado por uma tensão  $V_0$  da ordem de 10V. No entanto, as tensões no condensador e na bobina estão em oposição de fase, o que quer dizer que, quando uma é máxima a outra é mínima, mantendo a soma das tensões igual a zero, de acordo com as leis de Kirchoff.

As aplicações destes circuitos são muito importantes. São usados, por exemplo, como filtros passa-banda em equipamento de som (*equalizers*) ou para seleccionar uma frequência (rejeitando as outras) nos circuitos associados às antenas de telecomunicações. Neste caso, a frequência pode ser ajustada através de um condensador de capa-

cidade variável.

**Tabela 2. Algumas relações e constantes importantes**

Impedância de um circuito RLC em série	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
Condição de ressonância para um circuito RLC em série	$\omega L = \frac{1}{\omega C} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Frequência de ressonância	$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
Factor de qualidade,	$Q = \frac{f_0 L}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi f_0 CR}$
Permitividade eléctrica do vácuo	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ A.s.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$

### Equipamento

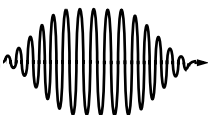
É necessário o seguinte equipamento para a realização da montagem experimental:

- 1 gerador de funções (com resistência interna de 60  $\Omega$ ).
- 1 osciloscópio
- 1 placa de montagem
- 1 condensador de 10 nF
- 1 bobina de 47 mH
- 2 cabos coaxiais/banana
- 1 cabo coaxial/coaxial
- 1 Tê BNC
- 3 *shunts*
- 1 resistência de 100  $\Omega$
- 1 resistência de 220  $\Omega$
- 1 resistência de 470  $\Omega$

A montagem está ilustrada na Fig. 3. Alguns dos equipamentos indicados podem ser substituídos por outros com especificações equivalentes.

### Montagem experimental

1. Identifique as unidades necessárias e os pontos de ligação dos cabos.



2. Estabeleça as ligações conforme indicadas na Fig. 3. Use em primeiro lugar  $R=470 \Omega$ .

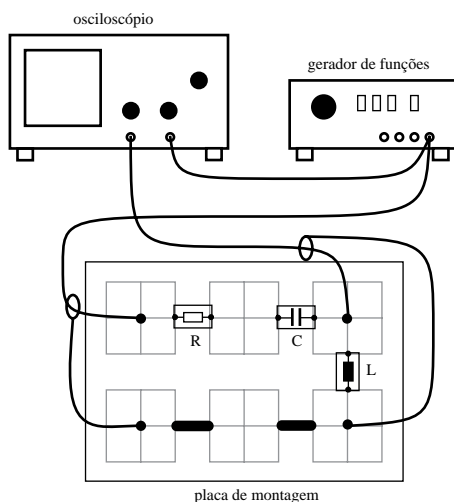


Figura 3. Montagem experimental.

3. Use o tê BNC para ligar a saída do gerador de funções aos canal 2 do osciloscópio e à placa de montagem. Ligue ao canal 1 do osciloscópio a tensão aos extremos da bobina.

4. Seleccione no gerador de funções uma tensão sinusoidal e com uma frequência de aproximadamente 10kHz.

5. Ligue o osciloscópio e tente visualizar o sinal no canal 2. Ajuste a amplitude do sinal sinusoidal para 10V de pico a pico.

6. Seleccione o canal 1 no osciloscópio e visualise correctamente o sinal.

**Medidas a obter**

1. Procure a frequência de ressonância do circuito por variar a frequência no gerador até obter uma amplitude máxima da sinusóide. Mude de escalas se necessário.
  2. Ajuste o osciloscópio para obter uma boa ampliação do sinal. Meça e registre a sua amplitude de pico a pico.
  3. Troque a resistência pela de  $220\Omega$  e repita o ponto 2. Poderá ser necessário ajustar ligeiramente a frequência para obter de novo o máximo de amplitude.
  4. Repita de novo o ponto 2 com as resistências de  $100 \Omega$  e  $0 \Omega$  (*shunt* ou curto-circuito).
- Nota: no caso de  $0 \Omega$  a resistência no circuito é o valor da impedância de saída do gerador mais o valor da resistência óhmica da bobina.
5. Repita os pontos 2, 3 e 4 com períodos decrescentes até que a amplitude varie pouco.

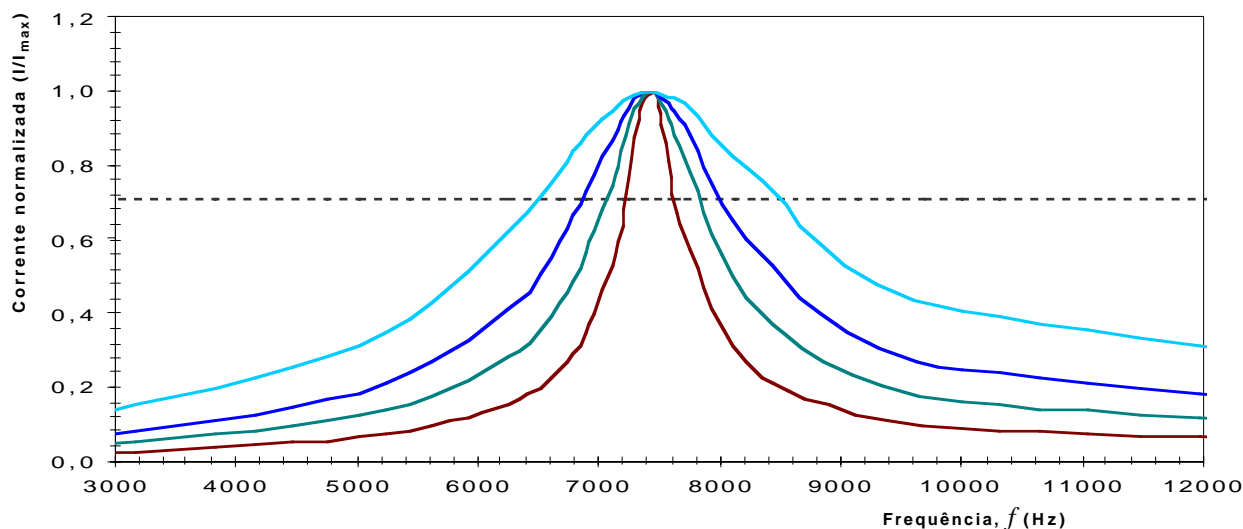


Figura 4. Representação das medidas adquiridas para  $R= 470$  (curva exterior),  $220$ ,  $100$  e  $0 \Omega$  (curva interior). As curvas foram obtidas por ajuste das relações teóricas e foram normalizadas ao máximo.

6. Volte à frequência de ressonância e repita os pontos 2,3 e 4 até que a amplitude varie pouco. Tente medir pontos suficientes para desenhar curvas do tipo das representadas na Fig. 4 e 5.
7. Selecione o modo XY no osciloscópio. Varie a frequência do gerador ao longo das frequências correspondentes aos períodos anteriormente indicados.
8. Observe a diferença de fase entre a tensão que excita o circuito e a tensão na bobina. Registe em que frequência os sinais estão desfasados de  $\pi/2$  (quadratura; elipse orientada segundo os eixos horizontal e vertical).
9. Por fim, meça e registe a resistência óhmica da bobina para cálculos posteriores.

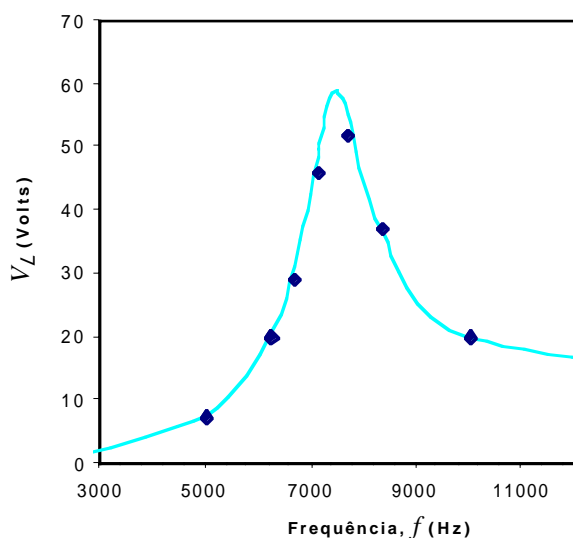
**Exemplo de medida**

A Fig. 5 apresenta um conjunto de medidas efectuadas com  $R=220 \Omega$ . A curva representada foi obtida por ajuste da equação

$$V_L = I_0 \cdot Z_L \tag{Eq. 10}$$

sendo  $I_0$  dado pela Eq. 4 e  $Z_L$  pela Eq. 2.

A frequência de ressonância observada de  $\approx 7200$  Hz é próxima do valor previsto dado pela Eq. 6.



**Figura 5.** Valores de  $V_L$  obtidos em função da frequência. A curva é um ajuste da Eq. 10.

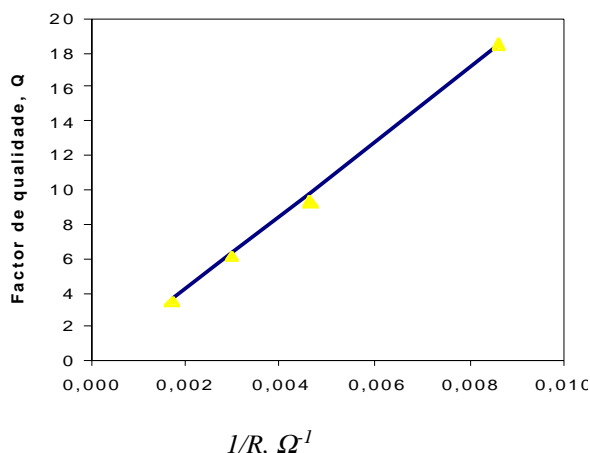
O factor de qualidade pode ser medido experimentalmente com base no gráfico da Fig. 2. A medida da largura de banda e da frequência de ressonância permite calcular o factor  $Q$  através da Eq. 7. Para esse fim, o gráfico da Fig. 5 tem de ser convertido de  $V_L$  para  $I_0$  em função de  $f$  através da relação dada pela Eq. 10.

A obtenção das curvas para os vários valores de  $R$  permite evidenciar o efeito do factor de qualidade do circuito na sua resposta à variação de frequência.

Desta forma, é possível analisar a dependência do factor de qualidade com o valor da resistência  $R$ , conforme expresso pela Eq. 8. Na Fig. está representada graficamente esta dependência e comparada com o valor teórico dado pela Eq. 8. A resistência interna do gerador  $R_G (=60 \Omega$  no nosso caso), bem como a resistência óhmica da bobina  $R_L$  não podem ser desprezadas quando comparadas com os valores das resistências usadas, pelo que tem de ser adicionadas ao valor de  $R$ . Deste modo, para efeitos de cálculos, deve *sempre* ser tomada em consideração o valor total da resistência dada por:

$$R_T = R + R_L + R_G \tag{Eq. 11}$$

Portanto, um valor para  $R=0\Omega$  indica que no circuito deve ser considerado ainda  $R_T = R_L + R_G$ .



Dependência do factor de qualidade com  $1/R$ , obtido dos dados da Fig. e de acordo com a Eq. 8 (linha contínua).



# 2

## Os circuitos RLC— Relatório

*Nomes:*

1-

---

2-

---

3-

---

*Data*

*Licenciatura*

*Grupo*

---

*(Não use este relatório como rascunho)*

---

### **Registo dos dados**

---

Registe os valores de R, L e C usados (poderão, eventualmente, ser diferentes dos indicados)

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

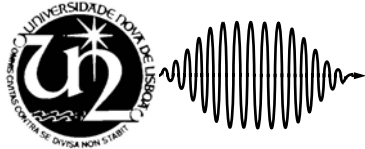
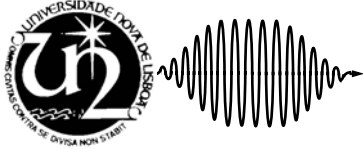


Tabela 1. Valores medidos

Período, T ( $\mu$ s) (próximo de $\omega_0$ )	(R= 470 $\Omega$ ) Amplitude, $V_L$ (Volts)	(R=220 $\Omega$ ) Amplitude, $V_L$ (Volts)	(R=100 $\Omega$ ) Amplitude, $V_L$ (Volts)	(R= 0 ) Amplitude, $V_L$ (Volts)



Calcule a frequência relativa a cada período. Use a equação 10 para construir uma nova tabela em que em vez de  $V_L$  represente  $I_0$ .

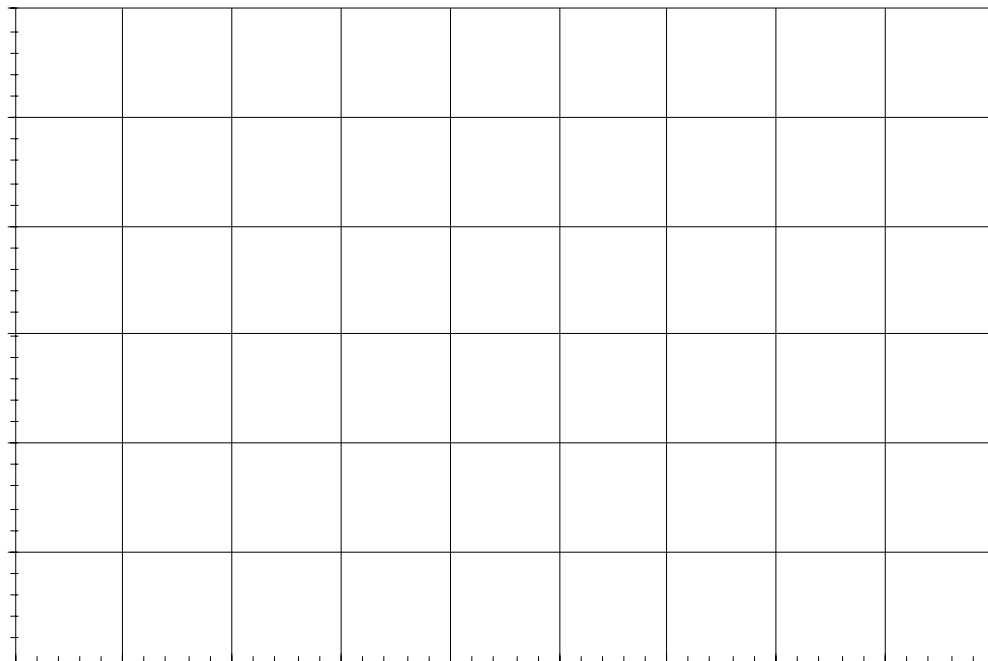
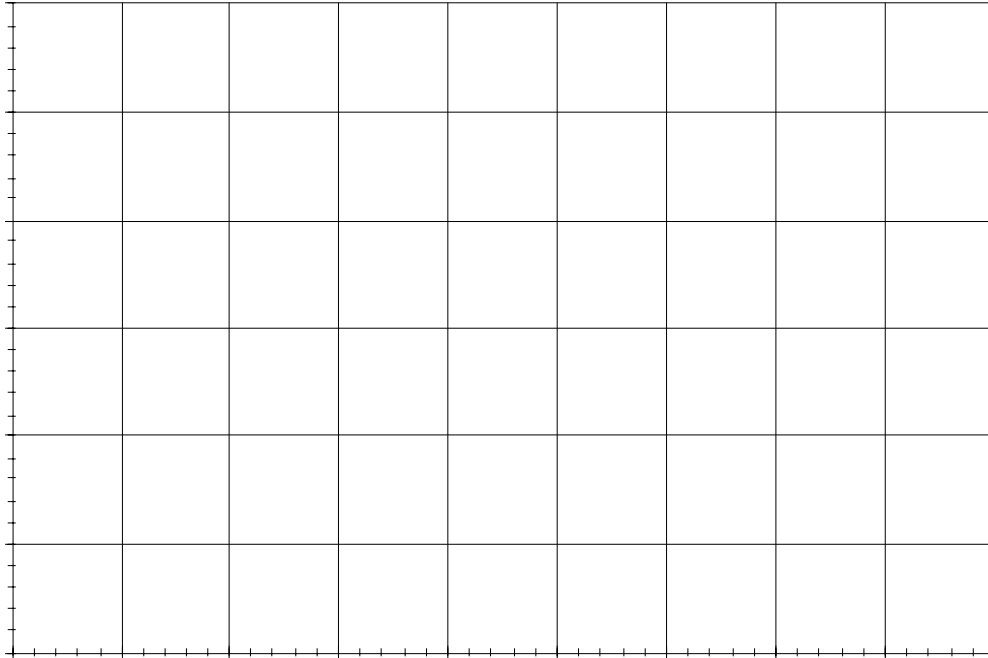
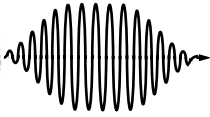
**Tabela 2. Valores calculados**

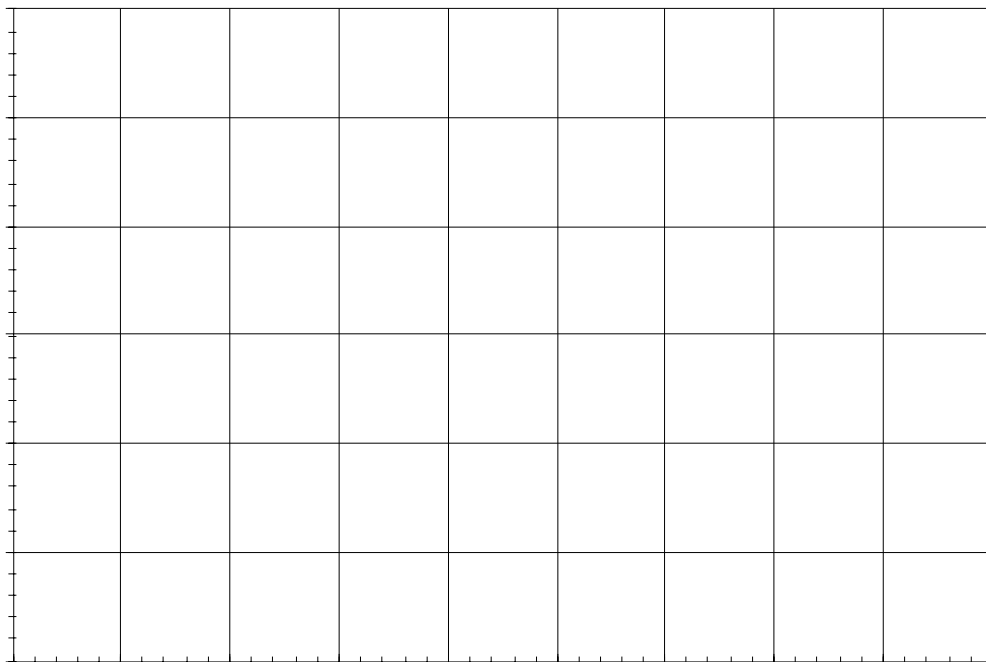
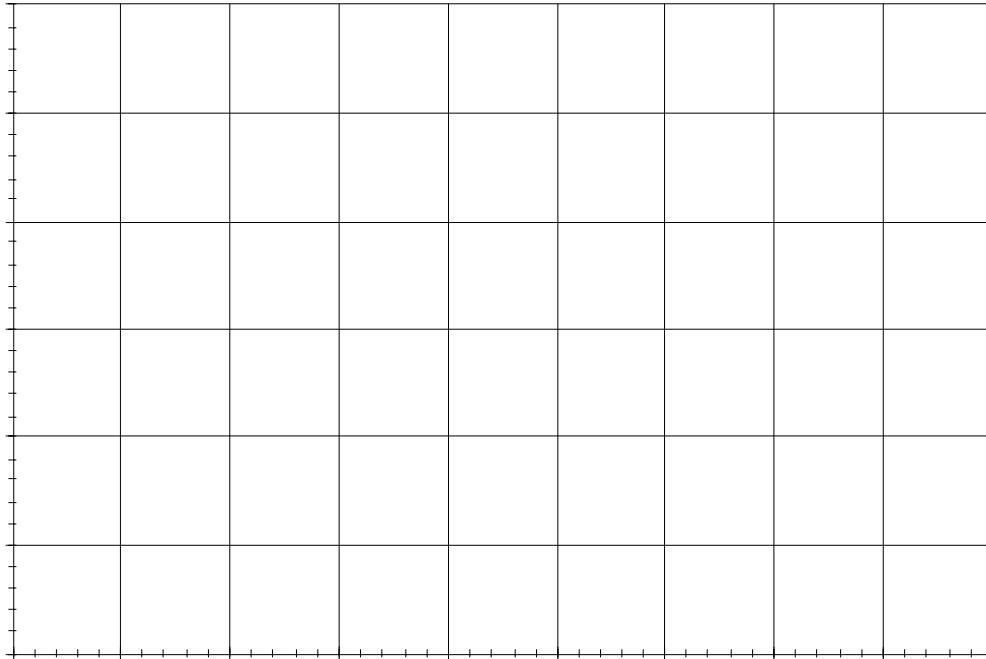
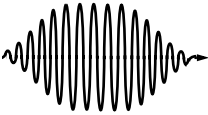
Frequência, f (Hz)	(R=470 $\Omega$ ) $I_0$ , (mA)	(R=220 $\Omega$ ) $I_0$ , (mA)	(R=100 $\Omega$ ) $I_0$ , (mA)	(R=0 $\Omega$ ) $I_0$ , (mA)

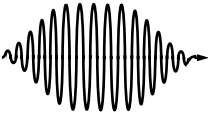
**Representação gráfica**

Faça gráficos semelhantes ao da Fig. 2. Identifique correctamente cada gráfico e os respectivos os eixos.









**Cálculo do factor de qualidade**

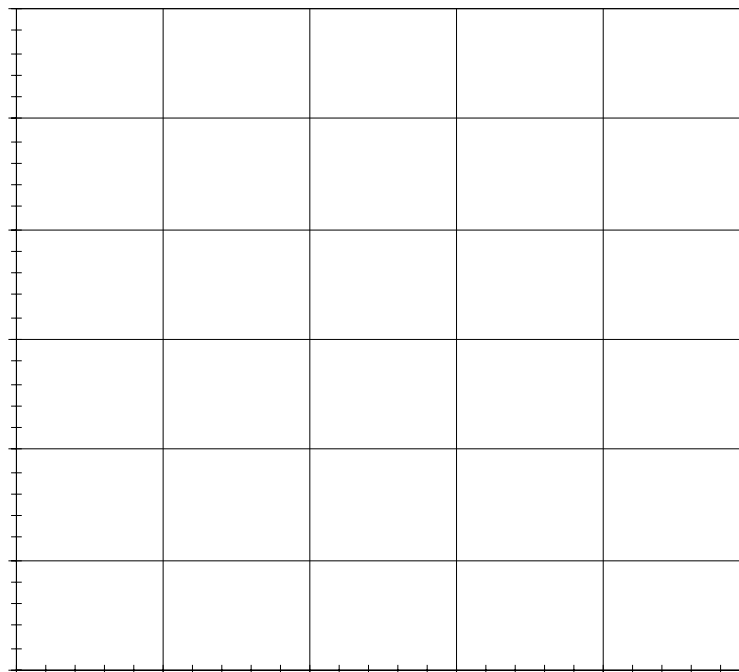
Meça o factor de qualidade para cada R e preencha a tabela seguinte.

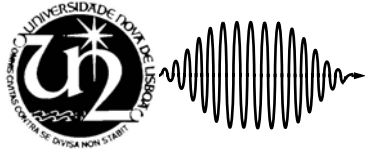
Use a Eq. 8 para calcular o  $Q_{teórico}$

**Tabela 3.**

R	1/R	$Q_{medido}$	$Q_{teórico}$

Compare os valores obtidos no seguinte gráfico:





**Discussão**

---

Comente os resultado que obteve. Estão as frequências de ressonância e os factores de qualidade próximos do valor esperados (dados pelas equações indicadas)? Quanto?

Discuta a incerteza dos valores obtidos, o método e as eventuais diferenças com o valor esperado.

Comente a diferença de fase observada no modo XY.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Conclusão**

---

Faça uma avaliação objectiva do trabalho. Refira quais dos objectivos propostos foram alcançados. Proponha eventuais alterações.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

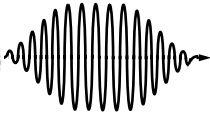
---

---

---

---

---



(Use se necessário apenas para relatório)