Gestão de Empresas

Cálculo Financeiro

1º Semestre 2022/2023

1

O Valor do Dinheiro

- **Valor do dinheiro:**

  i) contemporaneamente: os preços (quanto mais baixos, mais vale o dinheiro)

  ii) no tempo: a taxa de juro (custo de oportunidade) $r+\pi$

  (taxa de juro real + inflação)

- Notação:

  V_0 – valor do capital aplicado no momento 0 (inicial).

  V_n – valor do capital no momento futuro n.

  n – nº de unidades de tempo decorridas desde o momento presente (ou 0)

  i – taxa de juro por unidade de tempo.

2

Regimes de Juros

- **Regime de Juros Compostos:** Aplicação que vence juros em determinado período de tempo, sendo os juros calculados sobre o capital total (capital inicial mais juros entretanto acumulados).

V_0 é inicialmente aplicado (período 0)

$V_1=V_0(1+i)$ é o capital acumulado ao fim de um período

$V_2= V_1 (1+i) = [V_0 (1+i)] (1+i) = V_0 (1+i)^2$

.

.

.

$$\boxed{V_n = V_0(1+i)^n}$$

valor acumulado (em n) sob o regime de juros compostos

3

Regimes de Juros

- **Regime de Juro Simples:** Aplicação que vence juros em determinado período de tempo, mas apenas sobre o capital inicial.

Ex.

$V_1 = V_0 (1+i)$

$V_2 = V_1 + V_0 i = V_0 +2 V_0 i = V_0 (1+2i)$

.

.

.

$$\boxed{V_n = V_0 (1 + n i)}$$

Valor acumulado (em n) sob o regime de juros simples

4

Operações de Capitalização

- ***Capitalização (def):***

  Resultado financeiro de uma aplicação de capital durante certo período com contagem de juros.

  - *Valor futuro:* montante atual avaliado no momento futuro.

$V_t = V_0(1+i)^t$ *Valor futuro (em t) com juros compostos*

5

Operações de Atualização ou Desconto

- ***Atualização (def):***

  Montante a aplicar hoje para obter certo montante ao fim de um determinado período com contagem de juros.

  - *Valor atual:* montante futuro avaliado no momento atual.

Ex. $V_0 = V_t(1+i)^{-t}$

ou $V_0 = \dfrac{V_t}{(1+i)^t}$

6

Taxas de juro

- ***Taxa de juro proporcional***: para um dado período é a que resulta de se dividir a taxa de juro anual pelo número de períodos.
  → i periódica: i_k ;
  → número de períodos que ocorrem ao longo de um ano: k

  $$i_{período} = i_a / k$$

  Ex.º $i_m = i_a / 12$ *será a taxa de juro mensal proporcional a* i_a

- ***Taxa de juro equivalente***: é a taxa cujo processo de capitalização, ao longo de um mesmo período de tempo, gerará um montante equivalente no final desse período. Exemplo: qual a taxa de juro mensal (i_m) equivalente a uma taxa de juro anual i_a? É aquela que produzirá o mesmo capital acumulado ao fim de 1 ano (ou 12 meses)

  $$(1+i_m)^{12} = (1+i_a) \quad \text{ou} \quad i_m = (1+i_a)^{1/12} - 1$$

  Generalizando:

  $$i_{período} = (1+i_a)^{1/k} - 1$$

  onde período é o número de "períodos" num ano (se forem "meses" → são 12 num ano).

7

Rendas

- ***Rendas (def):*** Série de pagamentos que ocorrem durante certo período de tempo. Podem ser classificadas de acordo com 4 critérios:

  i) Variabilidade dos termos:
  . Constante: todos os termos iguais
  . Variável: termos diferentes.

  ii) Número de termos:
  . Temporária (número finito de termos).
  . Perpétua (número infinito de termos).

  iii) Período da renda e da taxa de juro:
  . Inteira: períodos coincidentes.
  . Fraccionada: períodos não coincidentes.

  iv) Vencimento do 1º termo:
  . Normal: 1º termo vence após um período
  . Antecipada: 1º termo vence de imediato (período 0)
  . Diferida: 1º termo vence após m períodos

8

Rendas

- ***Anuidade (def: renda constante e nº finito de termos)*** *onde:*

  A renda e taxa de juro são coincidentes (em termos de vencimento)

  vencimento do 1º termo normal (1º termo vence após um período).

Suponhamos uma prestação de valor a todos os períodos durante n períodos

Valor atual:

- $V_0 = P/(1+i) + P/(1+i)^2 + \dots + P/(1+i)^n$
- $\boxed{V_0 = \frac{P}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}$

9

Rendas

- **Demonstração:**

$V_0 = P/(1+i) + P/(1+i)^2 + \dots + P/(1+i)^n$

$V_0 = P\,\underbrace{[1/(1+i) + (1/(1+i))^2 + \dots + (1/(1+i))^n]}$

soma dos termos duma progressão geométrica de razão 1/(1+i)

*fórmula para a soma: 1º termo * (1-razão ⁿ)/1-razão). Substituindo:*

$$V_0 = P\,\frac{1}{(1+i)}\,\frac{1-1/(1+i)^n}{1-1/(1+i)}$$

$$V_0 = P\,\frac{1}{\cancel{(1+i)}}\,\frac{1-1/(1+i)^n}{\frac{\cancel{1}+i-\cancel{1}}{\cancel{1+i}}} \longrightarrow V_0 = \frac{P}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

10

Rendas

Valor capitalizado (ou futuro) duma renda:

$$V_n = P\,(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-2} + \ldots + P\,(1+i) + P\,(1+i)^0$$

$$\boxed{V_n = \frac{P}{i}\,[(1+i)^n - 1]}$$

Nota: O Valor capitalizado ao final de n períodos é apenas o valor atual multiplicado por $(1+i)^n$

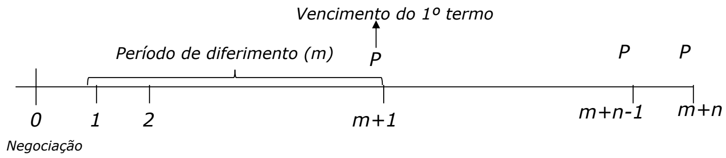
$$V_n = V_0\,(1+i)^n = \frac{P}{i}[1-1/(1+i)^n]\,(1+i)^n$$

$$V_n = \frac{P}{i}\,\frac{[(1+i)^n-1]}{\cancel{(1+i)^n}}\,\cancel{(1+i)^n} \Rightarrow V_n = \frac{P}{i}\,[(1+i)^n-1]$$

11

Rendas Diferidas

- *Anuidade (renda constante e nº finito de termos) onde:*
  renda e taxa de juros coincidentes
  vencimento do 1° termo diferido m períodos



Valor atualizado (hoje):

$$\boxed{V_0 = \frac{P}{i\,(1+i)^m}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}$$

12

Rendas Diferidas

Demonstração:

$$V_0 = P/(1+i)^{m+1} + P/(1+i)^{m+2} + \ldots + P/(1+i)^{m+n}$$

$$V_0 = \frac{P}{(1+i)^m} \underbrace{[1/(1+i) + (1/(1+i))^2 + \ldots + (1/(1+i))^n]}_{}$$

soma dos termos duma progressão geométrica de razão 1/(1+i) com n termos.

Fórmula para a soma: $\quad SOMA = 1^o\ termo \cdot \frac{1 - razão^n}{1 - razão}$

Substituindo:

$$V_0 = \frac{P}{(1+i)^m} \frac{1}{(1+i)} \frac{1-1/(1+i)^n}{1-1/(1+i)}$$

$$V_0 = \frac{P}{(1+i)^m} \frac{1}{\cancel{(1+i)}} \frac{1-1/(1+i)^n}{\frac{\cancel{1}+i-\cancel{1}}{\cancel{1+i}}} \longrightarrow \boxed{V_0 = \frac{P}{i\,(1+i)^m}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}$$

Rendas Diferidas

Valor capitalizado (ou futuro) da anuidade diferida m períodos:

$$V_n = P\,(1+i)^{\cancel{m}+n-(\cancel{m}+1)=n-1} + P\,(1+i)^{n-2} + \ldots + P\,(1+i)^0$$

$$\boxed{V_n = \frac{P}{i\,(1+i)^m}[(1+i)^n-1]}$$

Perpetuidades

- ***Perpetuidade*** *(Def): renda constante e nº infinito de termos) onde temos:* renda e taxa de juros coincidentes;

  vencimento do 1º termo normal.

P P

0 1 2

Valor atual: $V_0 = \lim_{n \to \infty} \frac{P}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$

$$\boxed{V_0 = \frac{P}{i}.}$$

15

Rendas Variáveis (crescentes)

Rendas variáveis *onde:*

número finito de termos

renda e taxa de juros coincidentes

vencimento do 1º termo normal.

Caso em que o valor da prestação cresce a uma taxa g :

$P \quad P(1+g) \quad P(1+g)^2 \quad\quad P(1+g)^{n-2}$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad\quad n-1 \quad n$

Valor atual (hoje):

$$\boxed{V_0 = \frac{P}{i-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n\right]}$$

16

Rendas Variáveis (crescentes)

Demonstração:

$$V_0 = P/(1+i) + P(1+g)/(1+i)^2 + \dots + P(1+g)^{n-1}/(1+i)^n$$

$$V_0 = \frac{P}{1+i}\underbrace{\left[1 + \frac{1+g}{1+i} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{(1+g)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right]}$$

soma dos termos duma progressão geométrica de razão (1+g)/(1+i) com n termos.

Fórmula para a soma: $SOMA = 1º\ termo\ \frac{1 - razão^n}{1 - razão}$

Substituindo:

$$V_0 = \frac{P}{(1+i)} \frac{1-[(1+g)/(1+i)]^n}{1-(1+g)/(1+i)}$$

$$V_0 = \frac{P}{\cancel{(1+i)}} \frac{1-[(1+g)/(1+i)]^n}{\frac{\cancel{1+i}-1-g}{\cancel{1+i}}} \longrightarrow \boxed{V_0 = \frac{P}{i-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^n\right]}$$

note-se como este valor converge para a fórmula da anuidade quando g=0 (renda constante)

17

Rendas Variáveis (crescentes)

Valor capitalizado (futuro ou final):

$$\boxed{V_n = \frac{P}{i-g}\left[(1+i)^n - (1+g)^n\right]}$$

18